Propozycje rozwiązań zadań otwartych

Matura 2016

Zadanie 26

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

Kolejne lata	1	2	3	4	5	6
Przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

Rozwiązanie

Średni roczny przyrost: $10+10+7+8+8+7=50$; $50:6=8\frac{1}{3}\approx 8$

Błąd bezwzględny przybliżenia: $8\frac{1}{3}-8=\frac{1}{3}$

Błąd względny przybliżenia: $\frac{\frac{1}{3}}{8\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{3}}=\frac{1}{25}$

Błąd procentowy: $\frac{1}{25}\cdot 100\% = 4\%$

Odp.

Średni przyrost wysokości tej sosny wynosi $8\frac{1}{3}\ cm$. Po zaokrągleniu do pełnych centymetrów daje to 8 cm. Jest to przybliżenie z niedomiarem z błędem względnym równym $\frac{1}{25}$, czyli 4%

Zadanie 27

Rozwiąż nierówność $2x^2-4x>3x^2-6x$

Rozwiązanie

$2x^2-4x>3x^2-6x \qquad /-2x^2+4x$

$\mathbf{0>x^2-2x}$

$0>x(x-2)$

Wykresem tego równania będzie parabola o ramionach skierowanych ku górze i przecinająca oś ox w punktach, których pierwsza współrzędna wynosi 0 lub 2

Odp.

$x \in (0; 2)$

Zadanie 28

Rozwiąż równanie $(4 - x)(x^2 + 2x - 15) = 0$

Rozwiązanie

Jednym z pierwiastków tego równania będzie $x = 4$

Aby znaleźć pozostałe pierwiastki należy rozwiązać równanie kwadratowe

$x^2 + 2x - 15 = 0$

Znajdźmy wyróżnik tego równania

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 + 4 \cdot 15 = 4 + 60 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 8}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

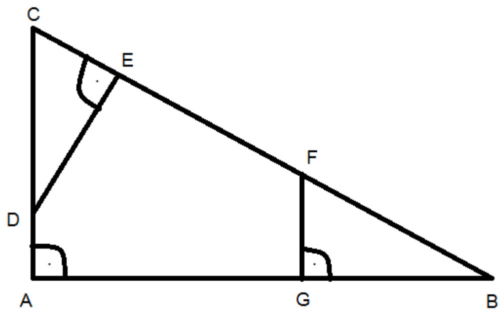
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 8}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Odp.

Równanie ma trzy rozwiązania: $x = 4 \quad lub \quad x = -5 \quad lub \quad x = 3$

Zadanie 29

Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*. Na przyprostokątnych *AC* i *AB* tego trójkąta obrano odpowiednio punkty *D* i *G*. Na przeciwprostokątnej *BC* wyznaczono punkty *E* i *F* takie, że $|\angle DEC| = |\angle BGF| = 90^0$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt *CDE* jest podobny do trójkąta *FBG*.



Rozwiązanie

Trójkąt DEC jest podobny do trójkąta ABC (oba są prostokątne i mają jeden kąt wspólny. Jest to kąt $\angle ACB$)

Trójkąt BGF jest też podobny do trójkąta ABC (oba są prostokątne i mają jeden kąt wspólny. Jest to kąt $\angle ABE$)

Ponieważ oba trójkąty są podobne do tego samego trójkąta, więc są podobne do siebie

Zadanie 30

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n \quad dla \quad n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Weźmy dwa kolejne wyrazy tego ciągu

Jeśli $a_n = 2n^2 + 2n$, to

$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 = 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2 = 2n^2 + 6n + 4$

$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = 4n^2 + 8n + 4 = 4(n^2 + 2n + 1) = 4(n+1)^2$

Ponieważ 4 jest kwadratem liczby 2, a $(n+1)^2$ jest kwadratem liczby $(n+1)$, więc $4(n+1)^2$ jest kwadratem liczby $2(n+1)$.

Zadanie 31

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

Rozwiązanie

Z równania $\log\frac{A}{A_0} = 6{,}2$, wynika, że $10^{6{,}2} = \frac{A}{A_0}$

Więc

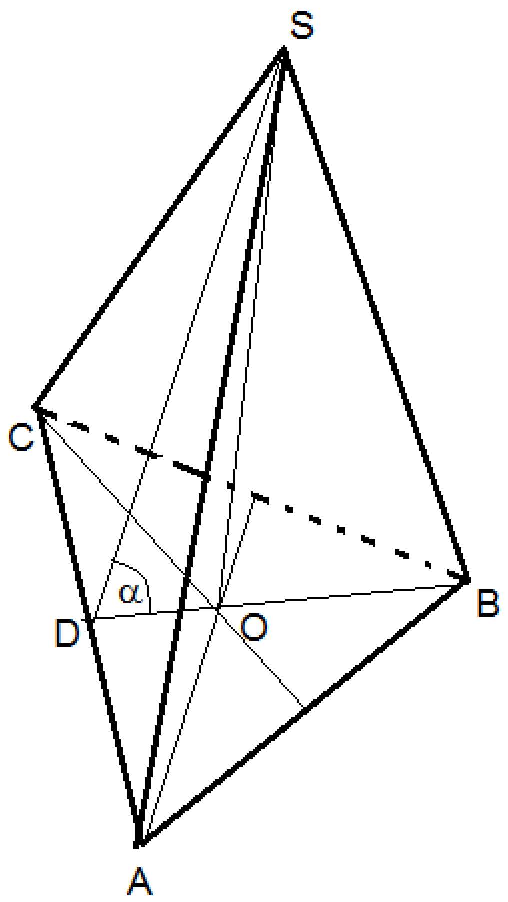
$A = 10^{6{,}2} \cdot 10^{-4} = 10^{2{,}2} > 10^2 = 100$

Odp.

Amplituda trzęsienia ziemi w Tajlandii wynosiła $10^{2,2}\ cm$, co jest więcej niż 100 cm

Zadanie 32
Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o 50° . Oblicz kąty tego trójkąta.
Rozwiązanie
Najmniejszy kąt w tym trójkącie ma miarę x. Wówczas jeden z pozostałych będzie miał miarę 3x, a ostatni trzeci kąt tego trójkąta ($x+50^0$). Można więc ułożyć równanie:
$x+3x+x+50^0=180^0$
$5x+50^0=180^0$
$5x=130^0$
$x=26^0$
$26^0+50^0=76^0$
$26^0\cdot 3=78^0$
Odp.
Najmniejszy kąt w tym trójkącie ma miarę 26^0, a pozostałe 76^0 i 78^0

Zadanie 33
Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* jest trójkąt równoboczny *ABC* . Wysokość *SO* tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa *ABCS* oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.
Rozwiązanie
Zacznijmy od rysunku



Wzór na objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

Podstawą jest trójkąt równoboczny, więc jego pole wynosi $P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Wysokość tego ostrosłupa wynosi $h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$

Wiedząc, że $V = 27$ otrzymujemy

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = 27$$

$$\frac{a^3 \cdot 3}{3 \cdot 8} = 27$$

$$\frac{a^3}{8} = 27$$

$$\frac{a}{2} = 3$$

$$a = 6$$

Krawędź podstawy ma 6. Wysokość tego ostrosłupa $h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Wysokość ściany bocznej wyliczymy z prostokątnego trójkąta ODS

$|OD|^2 + |OS|^2 = |DS|^2$

Ponieważ $|OD| = \frac{1}{3} h$, więc

$$\sqrt{3}^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 3 + 27 = 30$$

$|DS| = \sqrt{30}$
Pole jednej ściany bocznej wynosi
$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{30} = 3\sqrt{30}$
Ale ściany są 3, więc
$P_B = 3 \cdot 3\sqrt{30} = 9\sqrt{30}$
$\cos\alpha = \frac{|DO|}{|DS|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{3}{30}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$
Odp.
Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi $9\sqrt{30}$, a cosinus szukanego kąta
$\cos\alpha = \sqrt{0{,}1}$

Zadanie 34
Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.
Rozwiązanie
Wszystkich liczb dwucyfrowych jest 90. Aby suma dwóch wylosowanych liczb mogła wynosić 30 pierwsza z wylosowanych liczb nie może być większa od 20 i nie może być równa 15. (gdybyśmy wylosowali 15, to za drugim razem też musielibyśmy wylosować 15, a jest to nie możliwe, bo losujemy bez zwracania. Takich liczb dwucyfrowych jest 10.
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby nie większej od 20 i nie równej 15 wynosi więc $\frac{1}{9}$.

Dla każdej dobrej liczby wylosowanej w pierwszym losowaniu istnieje tylko jedna liczba, która do niej dodana da sumę 30. Ponieważ losujemy bez zwracania, więc prawdopodobieństwo wylosowania tej drugiej liczby wynosi $\frac{1}{89}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma dwóch wylosowanych liczb wynosi 30 wynosi $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{801}$
Odp.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{801}$